MEEC
Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

MCSDI
Modelação e Controlo de Sistemas Dinâmicos

Guião do trabalho laboratorial nº 4

Transformada dos *Z* e Sistemas de Tempo Discreto

Transformada dos *Z* e Sistemas de Tempo Discreto

Sumário: Pretende-se com este trabalho utilizar as potencialidades do software MATLAB no estudo da amostragem e reconstrução de sinais contínuos, na aplicação do método da transformada dos *Z* e na análise de sistemas de tempo discreto.

1. Introdução a Sistemas de Tempo Discreto

Os sistemas de tempo discreto são sistemas dinâmicos onde as variáveis mudam apenas em instantes discretos de tempo denominados kh (onde h é o período de tempo entre instantes de amostragem k=0, 1, 2, 3,…). Estes sistemas ocorrem, por exemplo, quando se tem um sistema controlado por computador. Neste caso as variáveis contínuas do sistema necessitam de ser amostradas para que o controlador possa realizar as operações de controlo necessárias. Posteriormente é realizada a operação de reconstrução do sinal controlado.

1.1. Amostragem e reconstrução de sinais de tempo contínuo

Os sistemas que usam elementos digitais no controlo de grandezas contínuas requerem a conversão dos respectivos sinais em valores que representam a amplitude do sinal num dado instante no tempo. Estes elementos são chamados genericamente de Amostradores, em sistemas controlados por computador esta operação é realizada por conversores analógico-digital (A/D). Um amostrador convencional consiste num interruptor que se fecha para admitir um sinal de entrada $x(t)$ a cada h segundos convertendo-o numa série de impulsos.

A conversão de um sinal analógico na correspondente versão amostrada é uma aproximação que implica a substituição da variação contínua das variáveis por um conjunto finito de valores. Este processo é chamado de quantização e, em geral, conduz a um pior desempenho do sistema de controlo.

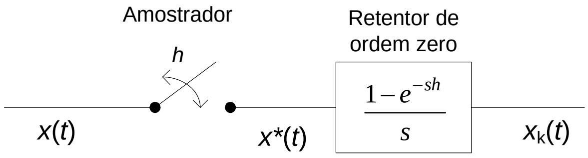

Figura 1: Conjunto Amostrador-Retentor

A operação inversa, ou seja, a reconstrução do sinal, é realizada por elementos denominados de Retentores. Em sistemas controlados por computador é realizada por conversores digital-analógico (D/A). Os retentores mais simples convertem o sinal amostrado $x^*(t)$ num com amplitude constante entre dois instantes consecutivos de amostragem $x_h(t)$, este processo é conhecido como z*ero-order hold* (retentor de ordem zero).

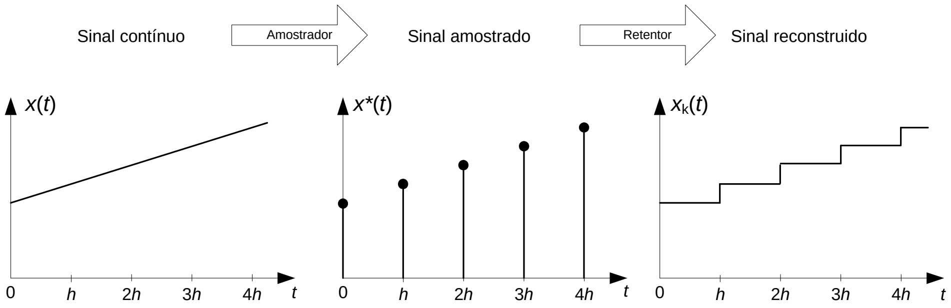

Figura 2: Operações de amostragem e reconstrução aplicadas ao sinal contínuo *x*(*t*)

1.2. Transformada dos Z

A transformada dos *Z* permite a transformação de sinais no domínio do tempo discreto para o domínio *Z*, sendo usada em sinais discretos da mesma forma que a transformada de Laplace o é em sinais contínuos.

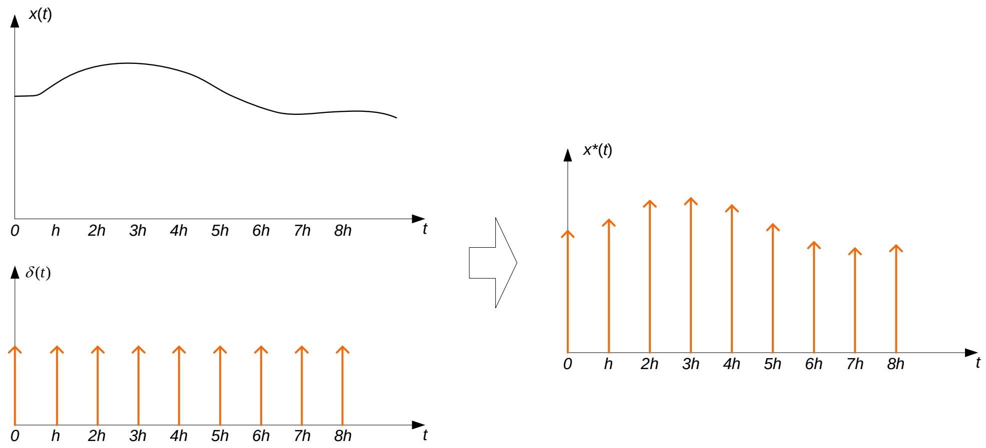

Figura 3: Processo de formação de sinais discretos

O sinal de tempo discreto, obtido a partir de um contínuo, pode ser representado como uma sequência de impulsos com amplitudes iguais à do sinal de tempo contínuo nos instantes de amostragem. O sinal resultante é definido por:

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kh)\delta(t-kh) = u(0)\delta(t) + u(h)\delta(t-h) + u(2h)\delta(t-2h) + \dots$$

Aplicando a Transformada de Laplace ao sinal amostrado e fazendo a mudança de variável $z = e^{hs}$, vem:

$$Z\{u(t)\} = U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kh) z^{-h} = u(0) + u(h)z^{-1} + u(2h)z^{-2} + \dots$$

Equação 1: Definição da Transformada dos Z do sinal contínuo *u*(*t*)

	$X(s)$	$x(t)$ ou $x(k)$	$X(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t-kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}=\frac{1}{1-z^{-1}}$
4	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
5	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
6	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
7	$\frac{6}{s^4}$	t^3	$\frac{T^3z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
8	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{2}{(s+a)^3}$	t^2e^{-at}	$\frac{T^2ze^{-aT}(z-e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
11	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{z\sin(\omega T)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$
12	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{z(z-\cos(\omega T))}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$
13	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{ze^{-aT}\sin(\omega T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(\omega T)+e^{-2aT}}$
14	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos(\omega T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(\omega T)+e^{-2aT}}$
15	-	a^k	$\frac{z}{z-a}=\frac{1}{1-az^{-1}}$
16	-	ka^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$
17	-	k^2a^k	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
18	-	$\frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}$	$\frac{z}{(z-a)^3}$
19	-	$a^k\cos(k\pi)$	$\frac{z}{z+a}$

Tabela 1: Transformadas dos Z mais comuns

	$x(t)$ ou $x(k)$	$Z[x(t)]$ ou $Z[x(k)]$
1	$ax(t)$	$aX(z)$
2	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(z)+bX_2(z)$
3	$x(t+T)$ ou $x(k+1)$	$zX(z)-zx(0)$
4	$x(t+2T)$	$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(T)$
5	$x(k+2)$	$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)$
6	$x(t+kT)$	$z^kX(z)-z^kx(0)-z^{k-1}x(T)-\ldots-zx(kT-T)$
7	$x(t-kT)$	$z^{-k}X(z)$
8	$x(k+m)$	$z^mX(z)-z^mx(0)-z^{m-1}x(1)-\ldots-zx(m-1)$
9	$tx(t)$	$-Tz\frac{d}{dz}[X(z)]$
10	$kx(k)$	$-z\frac{d}{dz}[X(z)]$
11	$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
12	$e^{-ak}x(k)$	$X(ze^{a})$
13	$a^kx(k)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
14	$ka^kx(k)$	$-z\frac{d}{dz}\left[X\left(\frac{z}{a}\right)\right]$
15	$x(0)$	$\lim_{z\to\infty}X(z)$ se o limite existe
16	$x(\infty)$	$\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$ se $\frac{z-1}{z}X(z)$ é analítica sobre e fora do circulo unitário
17	$\sum_{k=0}^{n}x(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$
18	$k^mx(k)$	$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^mX(z)$
19	$\sum_{k=0}^{n}x(kT)y(nT-kT)$	$X(z)Y(z)$
20	$\sum_{k=0}^{\infty}x(k)$	$X(1)$

Tabela 2: Propriedades da Transformada dos Z

1.3. Transformada dos Z inversa

A transformada dos *Z* inversa permite obter *x*(*k*) de *X*(*z*). Pode ser obtida por qualquer um dos três métodos descritos nas secções seguintes.

1.3.1. Expansão em fracções parciais

Para aplicar este método é necessário que a transformada dos Z seja uma função racional da variável complexa *z*. Verifica-se que a generalidade das transformadas apresentadas na tabela 1 apresenta o factor *z* no numerador. Assim, torna-se conveniente expandir *X*(*z*)/*z* e não apenas *X*(*z*) para que seja mais fácil a obtenção de transformadas tabeladas.

Considere a transformada dos *Z*:

$$X(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{2}{(z+1)(z-1)}$$

Expandido em fracções parciais vem:

$$\Leftrightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{-1}{z+1} + \frac{1}{z-1}$$
$$\Leftrightarrow X(z) = \frac{-z}{z+1} + \frac{z}{z-1}$$

Consultando a tabela de transformadas dos Z:

$$Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{-z}{z+1}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\}$$
$$x(nh) = -(-1)^n + 1 \quad , n \in \aleph_0$$
$$x(nh) = \begin{cases} 2 & , n \text{ ímpar} \\ 0 & , n \text{ par} \end{cases}$$

Considere a seguinte transformada dos *Z* que não apresenta o factor *z* no numerador:

$$X(z) = \frac{1}{z+1}$$

Multiplicando o dividindo por z obtém-se:

$$X(z) = \frac{z}{z(z+1)} \Leftrightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z(z+1)}$$

Expandido em fracções parciais vem:

$$\Leftrightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$$
$$\Leftrightarrow X(z) = 1 - \frac{z}{z+1}$$

Aplicando a transforma inversa dos *Z*:

$$Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\{1\} - Z^{-1}\left\{\frac{z}{z+1}\right\}$$

$$x(nh) = \delta(n) - (-1)^n \quad , n \in \aleph_0$$

1.3.2. Divisão longa de polinómios

Para aplicar este método também é necessário que a transformada dos Z seja uma função racional. Dividindo os polinómios do numerador e do denominador (ordenados por potências descendentes de z) obtém-se uma série. Os coeficientes de *z* na série, são os valores de *x*(*k*) na sequência temporal.

Considere a transformada dos *Z*:

$$X(z) = \frac{1}{z+1}$$

Fazendo a divisão longa:

$$\begin{array}{l|l}
1 & z+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-1 - z^{-1}} & z^{-1} - z^{-2} + z^{-3} - z^{-4} + \dots \\
\quad -z^{-1} & \\
\quad \underline{z^{-1} + z^{-2}} & \\
\qquad z^{-2} & \\
\qquad \underline{-z^{-2} - z^{-3}} & \\
\qquad\quad -z^{-3} & \\
\qquad\quad \underline{z^{-3} + z^{-4}} & \\
\qquad\qquad z^{-4} & \\
\qquad\qquad \vdots &
\end{array}$$

Reescrevendo *X*(*z*):

$$X(z) = z^{-1} - z^{-2} + z^{-3} - z^{-4} + \dots$$

Por comparação da expansão em série de *X*(*z*) com $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-h}$, obtém-se:

$$x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ x(2) = -1,\ x(3) = 1,\ x(4) = -1, \dots$$

Confirme que o resultado obtido verifica a fórmula simbólica obtida no ponto anterior.

1.3.3. Integral de inversão

O terceiro método para determinar a transformada inversa dos *Z* é o integral de inversão:

$$x(kh) = \frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} X(z) z^{k-1} dz$$

Onde Γ é um percurso, no sentido anti-horário, englobando todas as singularidades de *F*(*z*).

1.4. Equações às diferenças

Em geral um sistema dinâmico linear de tempo discreto com entrada *u*(*k*) e saída *y*(*k*) pode ser descrito por uma equação às diferenças linear:

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_0y(k)=b_nu(k+n)+b_{n-1}u(k+n-1)+\ldots+b_0u(k)$$

Equação 2: Equação às diferenças genérica

Aplicando a propriedade de deslocação nos tempos da transformada dos Z, esta é transformada numa equação algébrica em *z*. A aplicação do método da transformada dos Z está para as equações às diferenças como a transformada de Laplace está para as equações diferenciais.

Considere a seguinte equação às diferenças:

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=0 \quad \text{com} \quad y(0)=0,\, y(1)=1$$

Aplicando o método da transformada dos *Z* à equação obtém-se:

$$z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)+3zY(z)-3zy(0)+2Y(z)=0$$

Substituindo as condições iniciais $y(0)=0,\, y(1)=1$:

$$z^2Y(z)-z+3zY(z)+2Y(z)=0$$

$$Y(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}=\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}$$

Aplicando a transformada $Z\{a^k\}=\dfrac{z}{z-a}$, temos:

$$y(k)=(-1)^k-(-2)^k \qquad ,k=0,1,2,\ldots$$

Resolvendo para *k*=0, 1, 2, 3, 4, …

$$\begin{aligned}&y(0)=0\\&y(1)=1\\&y(2)=-3\\&y(3)=7\\&y(4)=-15\\&\ldots\end{aligned}$$

2. MATLAB na Análise de Sistemas de Tempo Discreto

2.1. Amostragem e reconstrução de sinais contínuos

Nesta secção pretende-se simular a amostragem de um sinal contínuo através de impulsos ideais para produzir um sinal discreto e verificar o impacto que diferentes períodos de amostragem têm na reconstrução do sinal contínuo com base no correspondente sinal discreto.

Considere o sinal contínuo da Equação 3, ilustrado na Figura 4, para $\omega = 2.\pi.10\ rad/s$.

$$x(t) = \sin(\omega t)$$

Equação 3: Sinal contínuo a amostrar

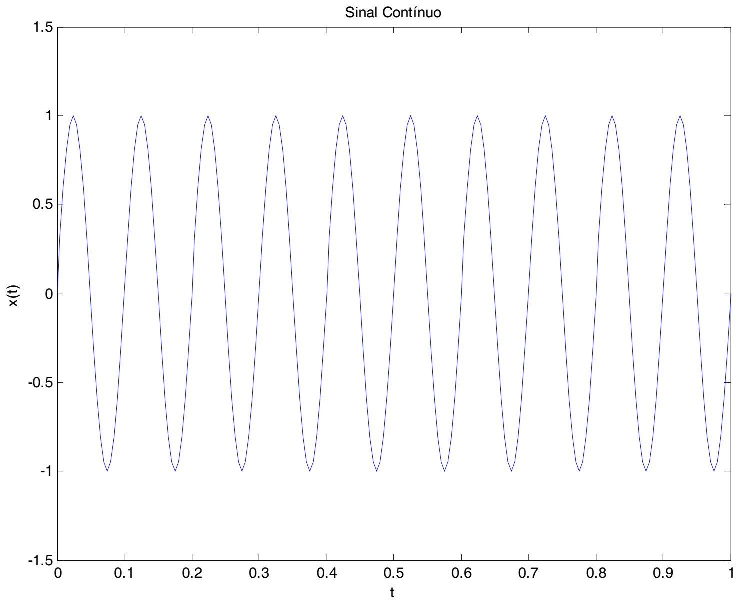

Figura 4: Gráfico da equação *x*(*t*)

1. Inicie a aplicação MATLAB.

2. Todo o código necessário para efectuar o estudo proposto pode ser escrito directamente na janela do MATLAB. Alternativamente, pode-se introduzir todo o código num ficheiro de dados do MATLAB, genericamente chamado M-File (é um ficheiro de texto normal, com extensão *.m), que é depois carregado para o MATLAB sempre que necessário.

   a) Esta solução é preferencial quando o código se torna extenso, para evitar ter que o estar a re-escrever de novo sempre que se pretende efectuar uma nova representação.

   b) Para criar um novo M-File, escolha a opção "New" do menu "File" do MATLAB.

   c) Dentro da opção "New", escolha a subopção "M-File".

   d) Aparecer-lhe-á numa nova janela o editor do MATLAB (Figura 5).

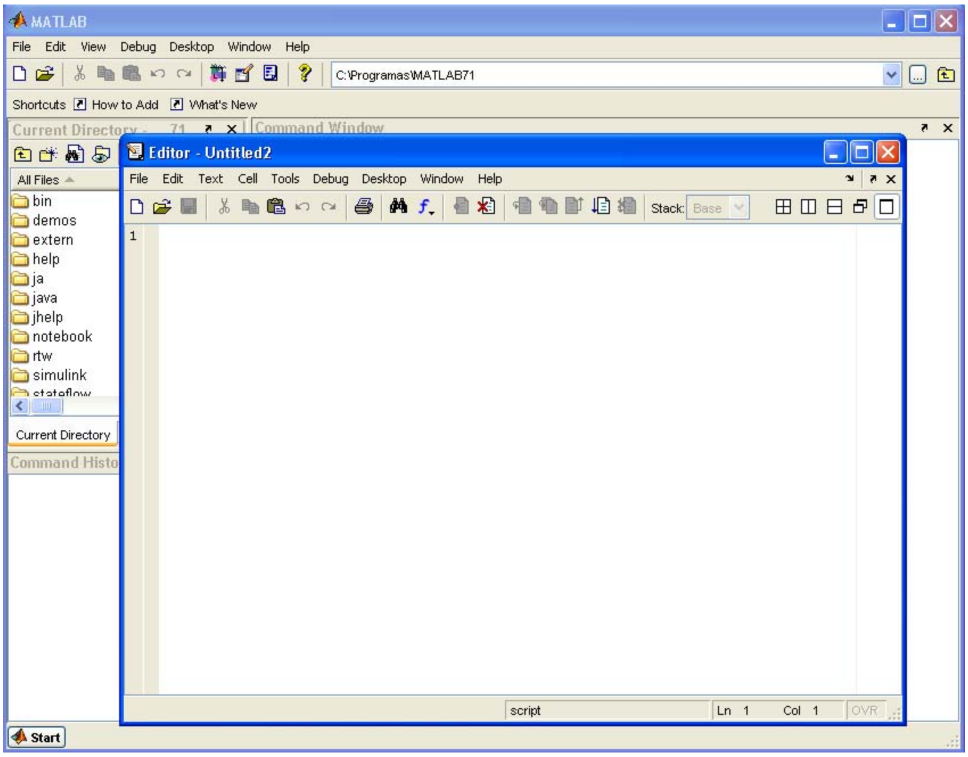

Figura 5: Janela do editor de ficheiros tipo M do MATLAB

e) Para documentar o código pode introduzir comentários no seu M-File, para o que deverá iniciar os comentários pelo caracter %.

3. Comece por obter o gráfico da Figura 4. Introduza o código seguinte no seu M-File:

```
clear; %limpa todas as variáveis
close all; %fecha todas as figuras abertas

t=0:.005:1; %vector de tempo (incrementos de 0.005 seg)
f=10; %Hz
x=sin(2*pi*f*t);

%plotting
figure(1);
plot(t,x);
axis([0 1 -1.5 1.5]);
title('Sinal Contínuo');
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
```

4. Grave o M-File seleccionado a opção "Save As..." do menu "File" da janela do Editor do MATLAB.

5. Para executar o M-File poderá escrever o nome do ficheiro na consola do MATLAB. Alternativamente, pode usar a opção “Run” do menu “Debug” da janela do editor de ficheiros M.

6. Considere uma frequência de amostragem fs_1=50 Hz (período de amostragem Ts_1=0,02 s). Obtenha a representação do sinal $x(t)$ amostrado através de impulsos ($x^*(t)$) à frequência de amostragem especificada.

   a) Recorrendo à função `stem` do MATLAB é possível representar graficamente uma função em instantes discretos de tempo. Para tal deverá definir um novo vector de tempo (`t1`) que contenha os instantes de amostragem à frequência pretendida (50Hz). Este será usado como parâmetro de entrada da função `stem` a par da função *x*(`t1`).

   b) Acrescente ao seu ficheiro M o seguinte código:

```
%plotting x(t) amostrado a 50Hz
fs1=50; %Hz
t1=0:1/fs1:1; %vector de tempo (incrementos de 0.02 seg)
x1=sin(2*pi*f*t1);

figure(2);
stem(t1,x1); %representa os valores da função x1 nos instantes t1
axis([0 1 -1.5 1.5]);
title('Sinal Amostrado a 50Hz');
xlabel('t');
ylabel('amplitude');
```

   c) A Figura 6 mostra o gráfico obtido depois de executado o ficheiro M. Observe que apesar do sinal estar na forma amostrada é perceptível o sinal contínuo que lhe deu origem.

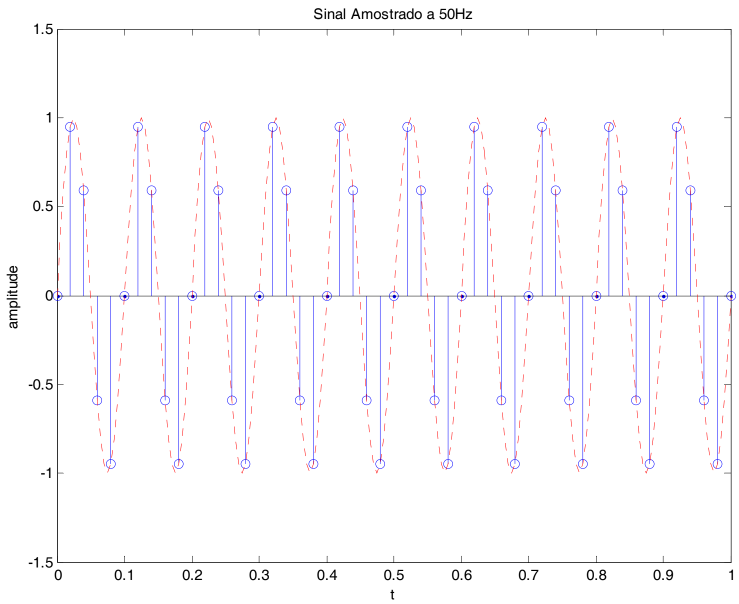

Figura 6: Sobreposição do sinal original com a versão amostrada a 50Hz

   d) Para obter um gráfico semelhante ao da Figura 6 adicione ao seu ficheiro M o código:

```
hold on; %adicionar gráficos sem alteração automática dos eixos
plot(t,x,'r:'); %sinal original, vermelho (r), tracejado (:)
```

7. O MATLAB disponibiliza a função `stairs` que permite simular a reconstrução de um sinal contínuo através de um retentor de ordem zero com base num conjunto de valores discretos. Use esta função para obter a reconstrução do sinal anteriormente amostrado.

   a) Comente a função `stem` relativa à `figure(2)`, no ficheiro M.

   b) Adicione a linha de código `stairs(t1,x1,'k');` ao ficheiro. O resultado é apresentado na Figura 7.

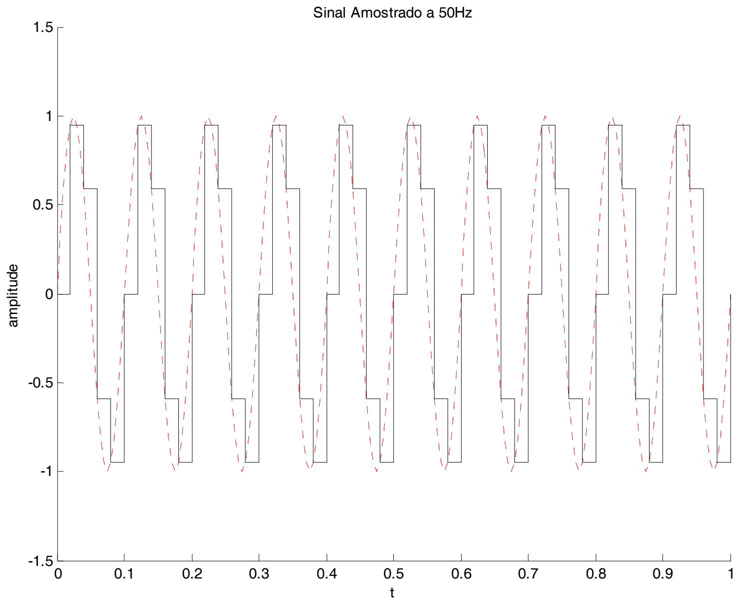

Figura 7: Sobreposição do sinal original com a versão reconstruída (fs_1=50Hz)

8. Repita os dois pontos anteriores (6. e 7.) de forma a obter as reconstruções do sinal *x*(*t*) amostrado às frequências fs_2=25 Hz e fs_3=11 Hz. O resultado para cada uma das frequências é ilustrado nas Figuras 8 e 9.

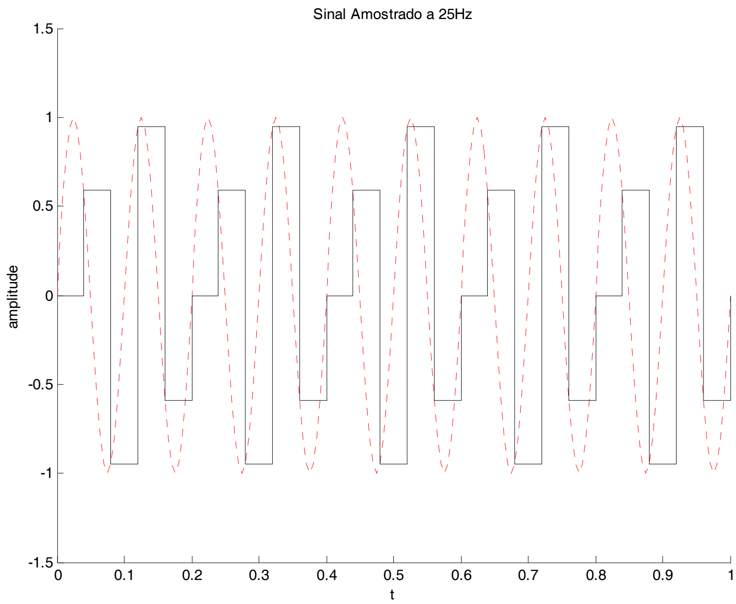

Figura 8: Sobreposição do sinal original com a versão reconstruída (fs_2=25Hz)

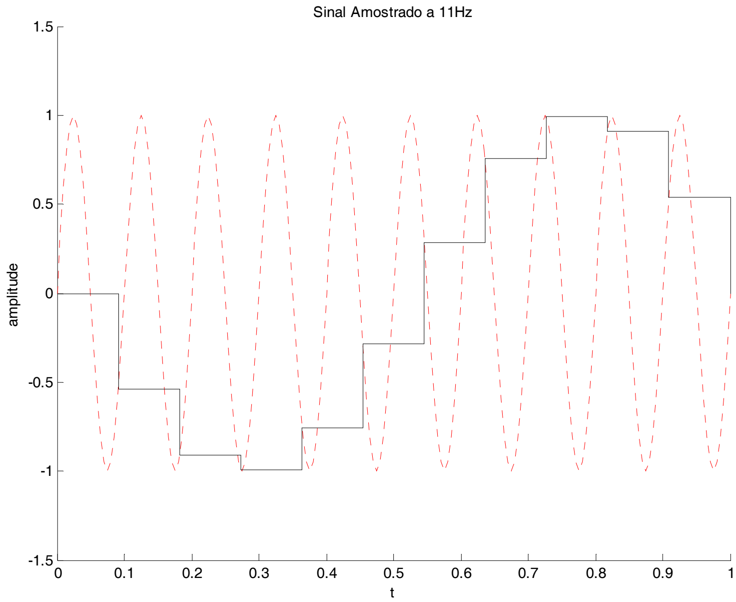

Figura 9: Sobreposição do sinal original com a versão reconstruída (fs_3=11Hz)

9. Verifica-se que para uma frequência de amostragem de fs_3=11Hz acontece o fenómeno de *aliasing*. Nesta situação o sinal original não poderá ser reconstruído a partir da sua versão digital devido à baixa frequência, relativamente à do sinal original, com que foi realizada a operação de amostragem.

10. Analise os gráficos obtidos e comente a relação entre a frequência do sinal contínuo e a de amostragem com a existência ou não de *aliasing*.

2.2. Função de transferência discreta

Através da função *contínuos to digital* (`c2dm`) do MATLAB é possível fazer a conversão de um sistema contínuo, representado por uma função de transferência ou no espaço dos estados, para uma representação discreta.

```
>>[numD,denD] = c2dm(numC,denC,Ts);
```

Na forma apresentada, a função usa um retentor de ordem zero para converter o sistema definido por dois vectores (numerador e denominador da função de transferência) com um período de amostragem `Ts`.

1. Para ilustrar o uso da função `c2dm` considere um sistema mecânico linear descrito pela função de transferência contínua:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{10s^2 + 3s + 5}$$

Obtenha a função de transferência discreta correspondente.

a) Para a entrada *F*(*s*)=1 introduza através da consola do MATLAB dois vectores referentes ao numerador e denominador.

b) Use para período de amostragem `Ts`=0,01 seg.

c) Use a função `c2dm` como demonstrado na Figura 10. Os dois vectores de retorno correspondem aos coeficientes do numerador e denominador da função de transferência discreta em ordem descendente de potências de *z*.

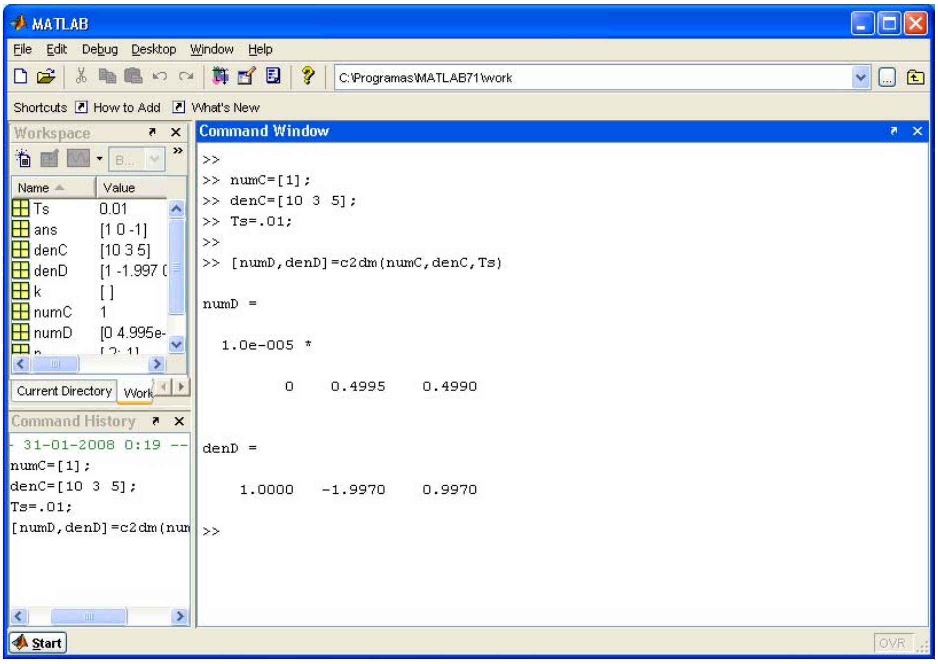

Figura 10: Conversão de um sistema continuo numa representação discretizada

2. Estude a resposta transitória do sistema discreto descrito pela função de transferência:

$$\frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{1}{z^2 - 0.3z + 0.5}$$

a) Para obter a resposta ao degrau de amplitude `A` deverá usar a função `dstep`. Esta função aceita como parâmetros de entrada os vectores com os coeficientes do numerador (`numD`) e denominador (`denD`) da função de transferência e o número de pontos (`N`) a considerar no cálculo.

```
>>xstep = dstep(A*numD,denD, N)
```

b) Use a função `dstep` com `N`=51 para obter os valores da resposta do sistema a uma entrada em degrau unitário. Para gerar o gráfico dos pontos obtidos use a função `stairs`.

```
>>numD=[1];
>>denD=[1 -0.3 0.5];
>>xstep = dstep (numD,denD,51);
>>t = 0:0.05:2.5;
>>stairs(t,xstep)
```

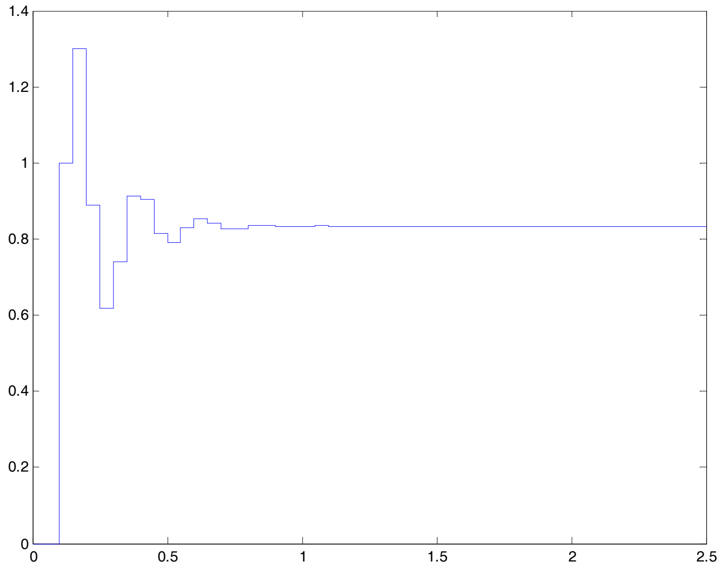

Figura 11: Resposta ao degrau unitário da função de transferência discreta

c) Da mesma forma, use a função `dimpulse` para obter a reposta ao impulso unitário (Figura 12). Em caso de dúvida use o comando `help`.

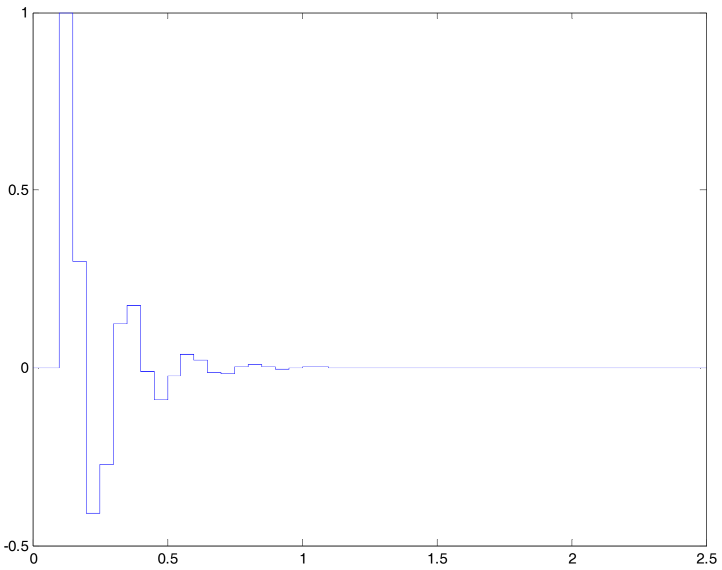

Figura 12: Resposta ao impulso unitário da função de transferência discreta

2.3. Transformada inversa dos Z

Dos métodos abordados para a obtenção da transformada inversa de Z o mais usual é o método da expansão em fracções parciais. A resultante soma de factores simples pode ser convertida para o domínio dos tempos através das transformadas apresentadas na Tabela 1.

A função do MATLAB `residue` permite determinar os resíduos e os termos directos de $X(z)/z$, aceitando para tal como parâmetros os vectores com os coeficientes do numerador e denominador ordenados de forma decrescente de potências de z.

1. Calcule a transformada inversa dos Z da função $X(z) = \dfrac{z}{z^2 - 3z + 2}$:

   a) Coloque a função na forma $\dfrac{X(z)}{z}$.

   b) Com a aplicação MATLAB iniciada, introduza na consola dois vectores referentes aos coeficientes do numerador e denominador de *X*(*z*)/*z*:

```
>> B=[1];
>> A=[1 -3 2];
```

   c) Use a função `residue` para obter os resíduos (`r`), pólos (`p`) e termos directos (`k`) da expansão em fracções simples de *X*(*z*)/*z*, como mostrado na Figura 13.

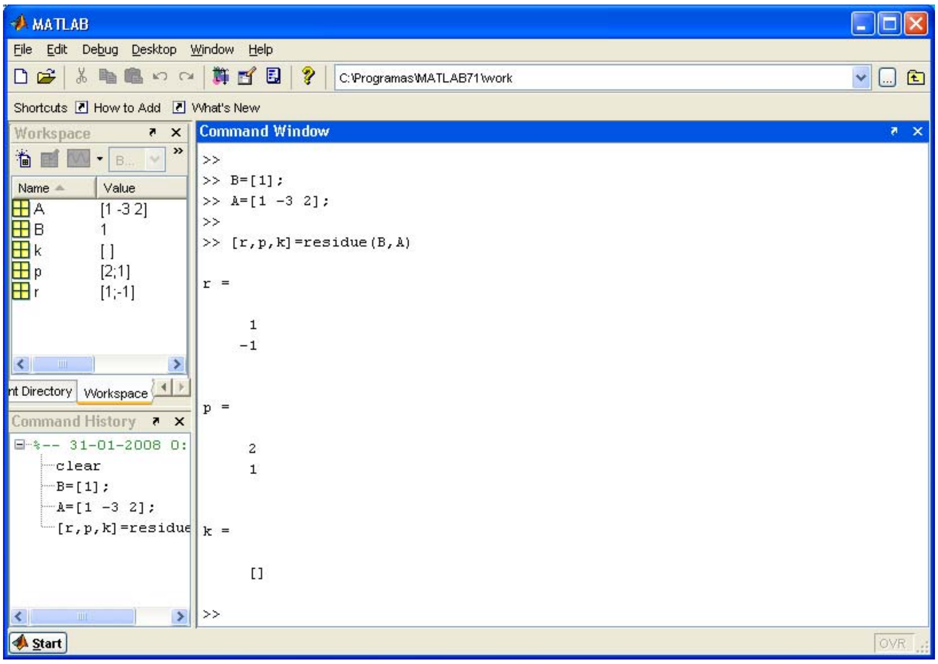

Figura 13: Retorno da função `residue`: resíduos, pólos e termos directos

   d) Com os dados obtidos a expansão de *X*(*z*)/*z* vem:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} \Leftrightarrow X(z) = -\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2}$$

   Use as transformadas da tabela 1 para obter *x*(*k*).

2.4. Equação às diferenças

O MATLAB disponibiliza a função `filter` que permite determinar a solução numérica de uma equação às diferenças para *k* instantes de amostragem. Recorde que um sistema dinâmico linear de tempo discreto com entrada *u*(*k*) e saída *y*(*k*) pode ser descrito por uma equação às diferenças linear:

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\ldots+a_0y(k)=b_nu(k+n)+b_{n-1}u(k+n-1)+\ldots+b_0u(k)$$

Numa das suas formas, a função `filter` aceita como parâmetros de entrada quatro vectores:

- b – coeficientes b_n da equação na forma b=[$b_{n}, b_{n-1}, \ldots, b_0$] (*)
- a – coeficientes a_n da equação na forma a=[$a_{n}, a_{n-1}, \ldots, a_0$] (*)
- X – valores do sinal de entrada para os instantes *k* a considerar
- `zi` - condições iniciais

```
>>filter(b,a,X,zi)
```

1. Considere o sistema representado pela a equação às diferenças, resolvido analiticamente no ponto 1.4.):

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=0 \qquad \text{com} \qquad y(0)=0,\, y(1)=1$$

Usando a função `filter` determine *y*(*k*) para k=0, 1, …, 9.

a) Introduza na consola dois vectores correspondentes aos coeficientes b_n (associados à entrada) e a_n (associados à saída) da equação às diferenças:

```
>> b=[0];
>> a=[1 3 2];
```

b) Crie o vector para o sinal de entrada e para as condições iniciais:

```
>> X=zeros(1,10);
>> zi=[0 1];
```

c) Execute a função `filter` como mostrado na figura 14. A variável de retorno contém a série de valores de *y*(*k*) para k=0, 1, …, 9 (instantes de amostragem).

(*) Se o sistema de tempo discreto, com entrada *u*(*k*) e saída *y*(*k*), for descrito por uma equação às diferenças linear do tipo:

$$a_0y(k)+a_1y(k-1)+\ldots+a_ny(k-n)=b_0u(k)+b_1u(k-1)+\ldots+b_nu(k-n)$$

Os vectores b e a são na forma:

b=[$b_0, b_1, \ldots, b_n$]
a=[$a_0, a_1, \ldots, a_n$]

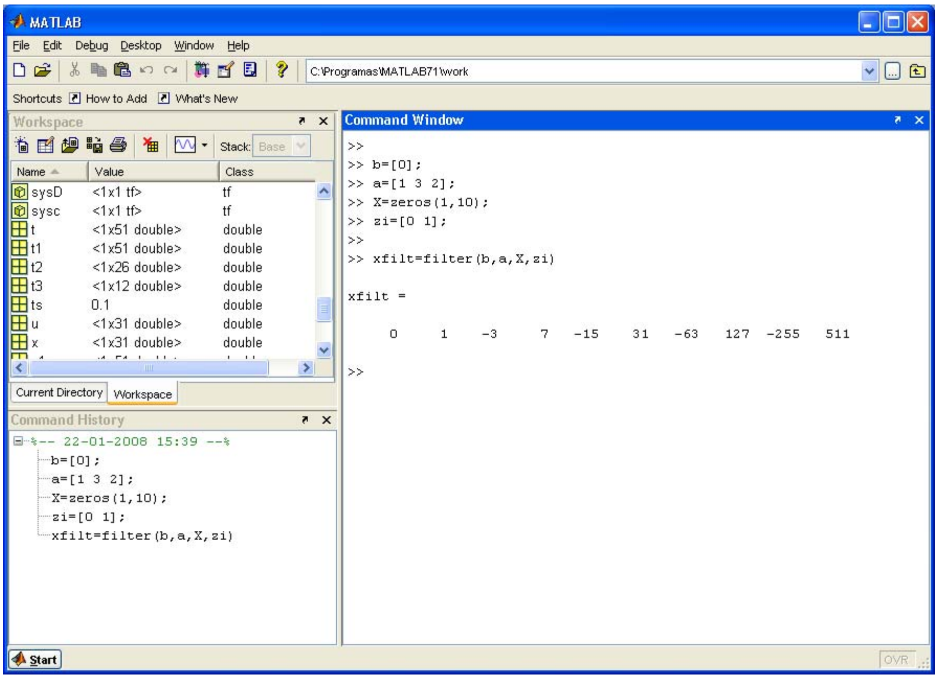

Figura 14: Aplicação da função `filter` a equações às diferenças

d) Obtenha o gráfico da série de valores de *y*(*k*) através da função `stem`.

3. Exercícios Adicionais

3.1. Amostragem e reconstrução de sinais contínuos

a) Analise o efeito, na reconstrução do sinal, da variação da frequência de amostragem no sinal *x*(*t*) composto por duas funções co-seno:

$$x(t) = \cos(7t) + \cos(23t)$$

3.2. Transformada inversa dos Z

a) Calcule a transformada inversa dos Z de $X(z) = \dfrac{1}{\left(1-0{,}9z^{-1}\right)^2\left(1+0{,}9z^{-1}\right)}, |z| > 0{,}9$.

Nota: Use a função `poly` para obter o polinómio do denominador.

Resposta: $x(k) = 0{,}75(0{,}9)^k + 0{,}5k(0{,}9)^k + 0{,}25k(-0{,}9)^k, k = 0, 1, 2, \ldots$

b) Obtenha os valores da função *x*(*k*) para os instantes k=0, 1, 2, 3, …, 10, do sinal com transformada $X(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)\left(z^2+2z+2\right)}$.

Nota: Use a função `dimpulse` para obter a sequência de *x*(*kh*). Relembre que um sinal com transformada *X*(*z*) pode ser interpretado como a resposta de um sistema com função de transferência X(z) a um impulso unitário.

Resposta:

$$x(0)=0,\ x(1)=0,\ x(2)=1,\ x(3)=0,\ x(4)=0,$$
$$x(5)=2,\ x(6)=-2,\ x(7)=2,\ x(8)=2,\ x(9)=-6,\ x(10)=10$$

4. Conclusões

Acabamos de ver como é possível recorrendo a funcionalidades do MATLAB visualizar o *aliasing* de sinais, obter a função de transferência discreta partindo da representação continua do sistema, facilitar o processo de cálculo da transformada inversa dos Z e encontrar a solução para equações às diferenças. As noções, métodos e funcionalidades aqui introduzidas, de uma forma necessariamente resumida, podem ser desenvolvidas recorrendo à bibliografia que se apresenta de seguida.

5. Bibliografia

[1] – J. L. Martins de Carvalho; Dynamical Systems and Automatic Control; Prentice-Hall; 1993.

[2] – Katsuhiko Ogata; Engenharia de Controle Moderno; Prentice-Hall do Brasil; 1982.

[3] – G.F. Franklin, J.D. Powell e M.L. Workman; Digital Control of Dynamic Systems, Third Edition; Addison-Wesley; 1998.

[4] – Katsuhiko Ogata; Discrete-Time Control Systems, Second Edition; Prentice-Hall; 1995.